

能量分析专题参考答案

1、(1) a. 如图所示

图像与坐标轴围成的面积即表示功的大小，其面积大小为

$$S = -\frac{1}{2}kL \times L = -\frac{1}{2}kL^2, \text{ 由于弹力方向与位移方向均与规定的正方向}$$

相反，则故弹簧对小球所做的功 $W = -S = \frac{1}{2}kL^2$

$$b. \text{ 由动能定理可得 } \frac{1}{2}kL^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

以水平向左为正方向，根据动量定理则有 $I = mv - 0$ ，联立解得 $I = L\sqrt{mk}$

(2) a. 在 $x = a$ 处时，小球的动量为零，则小球的速度为零，动能为零，则有 $E = \frac{1}{2}ka^2$

$$\text{解得半长轴 } a = \sqrt{\frac{2E}{k}}$$

在 $p = b$ 处弹簧的弹性势能为零，则有 $E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$ ，解得 $p = \sqrt{2mE}$ ，即半短轴 $b = \sqrt{2mE}$

$$b. \text{ 将上述结论代入椭圆的面积公式 } S = \pi ab = \pi \sqrt{\frac{2E}{k}} \sqrt{2mE} = 2\pi E \sqrt{\frac{m}{k}}, \text{ 即有 } E = \frac{S}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

椭圆的面积减小为原来的 90%，系统的能量 $E' = \frac{90\%S}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = 0.9E$

由功能关系可得，克服阻力所做的功 $W = E - E' = 0.1E$

$$\text{所以这段时间内克服微小阻力做功的平均功率 } P = \frac{W}{t} = \frac{0.1E}{T} = \frac{E}{10T}$$

2、(1) 根据图像可知 $E_{pG} = mg(h - x)$

根据图像可以解得起点离地高度 $h_0 = 1\text{m}$ ，下降到最低点位移为 $x_0 = 0.5\text{m}$

所以最低点的重力势能 $E_{pG} = mg(h_0 - x_0)$ ，解得 $E_{pG} = 5\text{J}$

(2) 从小球开始下落至最低点的过程中用能量守恒可得 $E_{pG\text{减}} = E_{pN\text{增}} + W_{f\text{克}}$

其中 $E_{pG\text{减}} = 10\text{J} - 5\text{J} = 5\text{J}$ ， $E_{pN\text{增}} = 4\text{J}$ ， $W_{f\text{克}} = fx_0$ ，解得 $f = 2\text{N}$

(3) 由图可知最大弹性势能 $E_{p\text{弹}m} = 4\text{J}$ ，根据题意有 $E_{p\text{弹}m} = \frac{1}{2}kx_1^2$

其中 $x_1 = 0.5\text{m} - 0.1\text{m} = 0.4\text{m}$ ，解得 $k = 50\text{N/m}$

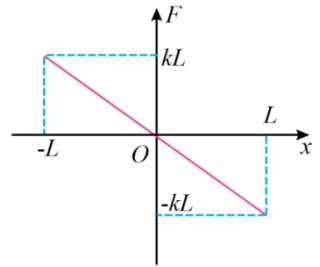
小球下落到最低点的过程中动能的最大值为 $a=0$ 的时候，此时有 $kx_2 + f = mg$ ，解得 $x_2 = 0.16\text{m}$

可知小球从开始到下落到 v 最大的时有 $h = 0.1\text{m} + x_2$

根据动能定理有 $mgh - fh - \frac{1}{2}kx_2^2 = E_{k\text{max}} - 0$ ，解得 $E_{k\text{max}} = 1.44\text{J}$

3、(1) 根据功的公式得静电力对试探电荷所做的功 $W = qEl \cos \theta$

(2) a. 由 B 随时间 t 的变化关系图可知，磁场随时间在均匀的增大，根据楞次定律可知，感应



电流的方向为顺时针，所以感生电场的方向为顺时针，再根据法拉第电磁感应定律有

$$E = S \frac{\Delta \psi}{\Delta t} = \pi r^2 \frac{\Delta \psi_0}{T_0} = \frac{\pi r^2 \psi_0}{T_0}$$

b. 电子运动一周感生电场力对电子做正功，有 $W' = eE = F \cdot 2\pi r$ ，得感生电场力的大小 F ， $F = \frac{reB_0}{T_0}$

静电场的电场线是不闭合的曲线，沿电场线方向电势逐渐降低，而涡旋电场是闭合曲线，所以不能像静电场一样建立“电势”的概念。

练习：A

4、(1) 对金属棒受力分析，当受力平衡时，具有最大速度，即 $mg = F_{安}$

$$\text{又 } F_{安} = Bld, I = \frac{E}{R} = \frac{Bdv_1}{R}, \text{ 联立，解得 } v_1 = \frac{mgR}{B^2 d^2}$$

$$\text{由能量守恒定律：} mgh_0 = \frac{1}{2}mv_1^2 + Q, \text{ 则 } Q = mgh_0 - \frac{m^3 g^2 R^2}{2B^4 d^4}$$

(2) 由能量守恒定律，可得 $mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}CU_0^2$ ，又 $U_0 = Bdv$ ，联立，解得 $h = \frac{m + CB^2 d^2}{2mgB^2 d^2} U_0^2$

(3) 设金属棒下落速度为 v ，根据题意有 $Bdv = L \frac{\Delta I}{\Delta t}$

设金属棒速度达到最大值 v_2 时，电流为 I_0 ，有 $mg = BI_0 d$

设该过程金属棒下落的高度为 x_0 ，根据能量守恒定律有 $mgx_0 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}LI_0^2$

又 $Bdv\Delta t = L\Delta I$ ，可得 $Bdx_0 = LI_0$ ，联立，解得 $v_2 = \frac{g\sqrt{mL}}{Bd}$

(4) 186J

5、(1) 在小球 1 下落过程，依据动能定理有 $mgh = \frac{1}{2}mv_0^2$ 可得 $v_0 = \sqrt{2gh}$

弹性碰撞过程中，以 v_0 的方向为正方向，机械能和动量均守恒 $mv_0 = mv_1 + mv_2$ 、

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 \quad \text{联立可得 } v = v_0 = \sqrt{2gh}$$

(2) a. 如图



b. 可将细圆线圈视为由许多小段通电直导线组成，所

有小段通电导线在径向磁场 B_r 作用下安培力方向均向右，将每一小段通电导线受到的安培力求和，

即为周长为 $2\pi r$ 的细圆线圈（即弹头）受到的总安培力可得 $F = 2\pi rIB_r$ 。

c. 为使弹头 3 获得理论上的速度上限，应将弹头 1 放到左侧足够远处，且保证两弹性圆柱也足够长。

设弹头 1 运动到载流线圈 1 处的速度大小为 v_1 ，根据能量守恒可得 $0 + 0 = -\pi r^2 IB_0 + \frac{1}{2}mv_1^2$

弹头 1 与弹性圆柱之间发生弹性碰撞，设碰后弹头 1 和弹性圆柱的速度大小分别为 v_1' 和 v_2' ，根据

弹性碰撞过程中，以 v_1 的方向为正方向，机械能和动量均守恒，则有 $mv_1 = mv_1' + mv_2'$ 、

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}mv_2'^2, \text{ 可得 } v_1' = 0, v_2' = v_1$$

即速度发生交换。同理，左侧的弹性圆柱与弹头 2 之间弹性碰撞后，速度也交换，弹头 2 获得速度 v_1 继续向右运动。

与上述过程类似，设弹头 2 运动到载流线圈 2 处的速度大小为 v_2 ，根据能量守恒可得

$$0 + \frac{1}{2}mv_1^2 = -\pi r^2 IB_0 + \frac{1}{2}mv_2^2, \text{ 接下来弹头 2 与右侧弹性圆柱交换速度、右侧弹性圆柱与弹头 3 交换}$$

速度，弹头 3 获得的最速度上限为 $v_m = v_2 = \sqrt{\frac{4\pi r^2 IB_0}{m}}$

$$6、(1) \text{ 探测器绕星球沿圆轨道匀速率运行时，万有引力提供向心力 } \frac{GMm}{r^2} = m\left(\frac{v}{T}\right)^2 r$$

$$\text{即 } \frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} = k \text{ 可得 } M = \frac{4\pi^2 k}{G}$$

(2) 氦离子经加速电压 U 加速后，相对探测器的速度大小为 v ，根据动能定理得 $qU = \frac{1}{2}mv^2$

在 t 时间内喷出氦离子质量为 $\Delta m = nmt$ 根据动量定理得 $Ft = \Delta m \cdot v$ 联立解得 $F = n\sqrt{2mqU}$

根据牛顿第三定律知：探测器获得的反冲作用力大小为 $F' = F = n\sqrt{2mqU}$

探测器质量随时间的变化规律为 $M = M_0 - nmt$

探测器加速度 a 随时间 t 的变化规律为 $a = \frac{F'}{M} = \frac{n\sqrt{2mqU}}{M_0 - nmt}$

(3) ① 设探测器绕过行星后，行星速率为 v_2' ，以行星运动方向为正方向，根据动量守恒定律得

$$M_2 v_2 - m_1 v_1 = M_2 v_2' + m_1 v_1', \text{ 根据机械能守恒定律得 } \frac{1}{2}M_2 v_2^2 + \frac{1}{2}m_1 v_1^2 = \frac{1}{2}M_2 v_2'^2 + \frac{1}{2}m_1 v_1'^2$$

联立解得 $v_1' = \frac{M_2 - m_1}{M_2 + m_1} v_1 + \frac{2M_2}{M_2 + m_1} v_2$ ，由于 $m_1 = M_2$ 得 $v_1' = v_1 + 2v_2$ 。

② 行星与探测器相互作用时，发生动量和能量的转化。由于行星与探测器相对运动，行星具有较大的轨道速率，且 $m = M$ ，行星动能（或动量）损失很小，探测器却获得了较大的速率。

7、(1) a. 根据质量数和质子数守恒，则铀核衰变方程为 ${}_{92}^{238}\text{U} \rightarrow {}_{90}^{234}\text{Th} + {}_2^4\text{He}$

b. 设质子和中子的质量均为 m ，衰变后氦核的速度为 v_1 ，钍核的速度为 v_2 ，选氦核的运动方向为正方向，根据动量守恒定律得 $4mv_1 - 234mv_2 = 0$

解得钍核的速度大小为 $v_2 = \frac{2}{117}v_1$ ，又 $E = \frac{1}{2} \cdot 4mv_1^2$ ，则反冲的钍核的动能 $E_k = \frac{1}{2} \cdot 234mv_2^2 = \frac{2}{117}E$

(2) 滑块 A 和 B 系统动量守恒，设弹簧恢复原长时，滑块 A 和 B 的速度分别为 v_A 和 v_B ，选取滑块 A 运动方向为正方向，则根据动量守恒定律可得 $mv_A - Mv_B = 0$

又由能量守恒定律可知，弹簧弹性势能为 $E_p = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}Mv_B^2$

则滑块 A 获得的动能为 $E_{kA} = \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{p_A^2}{2m} = \frac{E_p}{1 + \frac{m}{M}}$

m 和 E_p 均为定值，因此滑块 B 的质量 M 越大，剪断轻绳，当弹簧恢复原长时，滑块 A 获得的动能就越大。

(3) 卫星喷气的过程中，可认为卫星和喷出的气体所组成的系统动量守恒，设喷气前卫星沿椭圆轨道运动的速度为 v_0 ，喷出后卫星的速度为 v ，以喷气前卫星运动方向为正方向，根据动量守恒定律，有 $Mv_0 = (M - \Delta m)v + \Delta m(v - u)$ ，解得 $v = \frac{\Delta m}{M}u + v_0$

由上式可知，卫星在椭圆轨道上运动速度 v_0 大的地方喷气，喷气后卫星的动能 $E_k = \frac{1}{2}(M - \Delta m)v^2$

也就越大，因此卫星应该在其速率最大的近地点处点火喷气。

8、(1) 当风垂直流向风轮机时，提供的风能功率最大，令此时风轮机叶片旋转扫过的面积为 S ，则单位时间内垂直流向叶片旋转面积的气体质量 $m = \rho vS$

风力发电机的最大功率 $P_m = \frac{1}{2}mv^2$ ，解得 $P_m = \frac{1}{2}\rho Sv^3$

由于风力发电机的输出功率 P 与最大接收功率 P_m 成正比，则风力发电机的输出功率为

$$P_2 = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^3 P_1 = \left(\frac{10}{15}\right)^3 \times 2.7 \times 10^4 \text{ kW} = 8 \times 10^3 \text{ kW}$$

则最低年发电量约为 $W = P_2 t = 8 \times 10^3 \times 6000 \text{ kW} \cdot \text{h} = 4.8 \times 10^7 \text{ kW} \cdot \text{h}$

(2) 驱动电机的输出功率 $P = UI$

当阳光垂直于电池板入射时，所需板面积最小，设其为 S ，距离太阳中心为 r 的球面面积 $S_0 = 4\pi r^2$

设太阳能电池板实际接收到的太阳能功率为 $P_{\text{板}}$ ，则有 $\frac{P_{\text{板}}}{P_0(1-30\%)} = \frac{S}{S_0}$

根据题意有 $P = 0.32P_{\text{板}}$ ，所以电池板的最小面积 $S = \frac{4\pi r^2 P}{0.32 \times 0.7 P_0} \approx 101 \text{ m}^2$

我的思考：电池板的面积远远大于电动客车的车顶面积，所以用太阳能电池板直接驱动汽车是困

难的。但可以利用太阳能给具备储能功能的电池充电，待容纳的电量足够时就可以驱动汽车对外做功。

(3) 设用电低谷阶段电站消耗的总电能为 $E_{\text{总}}$ ，压缩机组对气体做功 $W = E_{\text{总}} \cdot 90\%$

气体向外界传递的热量 $Q = E_{\text{总}} \cdot 80\%$

根据热力学第一定律可知，气体增加的内能 $\Delta U = W + (-Q)$

其中 ΔU 等于 5 千瓦时，解得 $E_{\text{总}}$ 等于 50 万千瓦时。根据题意可知，当完成一次压缩时的发电量 $E_{\text{出}}$

等于 30 万千瓦时，则该电站输入、输出电能转化效率 $\eta = \frac{E_{\text{出}}}{E_{\text{总}}} \cdot 100\% = 60\%$